Théorème de Runge

Développement pour les leçons 203 [1], 204 [2] et 245 [3]

1 Introduction

Voici l'énoncé du théorème de Runge : soit K un compact de $\mathbb{C}$ tel que K^c soit connexe. Alors pour tout $a \in K^c$, la fonction

$$f : \begin{pmatrix} K & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{z-a} \end{pmatrix}$$

est limite uniforme de polynômes sur K.

La démonstration de ce théorème repose sur une idée simple : on montre d'abord que l'ensemble des $a \in K^c$ vérifiant cette propriété n'est pas vide, puis on montre que cet ensemble est un ouvert-fermé de K^c, ce qui nous permettra par argument de connexité d'avoir que la propriété est vraie sur K^c.

2 Preuve du théorème de Runge

On désigne par $P(K)$ l'adhérence des polynômes dans l'ensemble $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{C})$, munit de la norme de la convergence uniforme. Cet ensemble est stable par somme et produit : si $f, g \in P(K)$, si (P_n) converge uniformément vers f et (Q_n) converge uniformément vers g, alors $(P_n + Q_n)$ et $(P_n Q_n)$ convergent respectivement vers $f + g$ et fg.

On considère $a \in K^c$. On note $\varphi_a \in \mathcal{C}^0(K)$ la fonction définie par $\varphi_a(z) = \frac{1}{z-a}$. Pour démontrer le théorème, il suffit donc de montrer que pour tout $a \in K^c$, $\varphi_a \in P(K)$.

On pose l'ensemble $A = \{a \in K^c \mid \varphi_a \in K^c\}$. L'objectif va être de montrer que $A = P(K)$ en montrant cela en trois étapes : on montre que A est non-vide, que A est fermé dans K^c et que A est ouvert dans K^c. Ainsi, comme K^c est connexe, on aura que $A = K^c$ ce qu'il faut démontrer.

2.1 $\mathbf{A \neq \emptyset}$

On considère $R = \sup\{|z|, z \in K\}$. Soit a tel que $a \in K^c$ et $|a| > R$ (c'est possible de choisir un tel a car K est un compact, donc qu'il est borné). On a alors pour tout $z \in K$,

$$\begin{aligned} \varphi_a(z) &= \frac{-1}{a} \frac{1}{1 - \frac{z}{a}} \\ &= \frac{-1}{a} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z}{a}\right)^n \qquad \text{car } |z| \leq R < |a| \\ &= -\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{a^{n+1}} \end{aligned}$$

Mais la série $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{a^{n+1}}$ est une série qui converge normalement. En effet, on a pour tout $z \in K$, $\left|\frac{z^n}{a^{n+1}}\right| < \frac{1}{R}\left(\frac{R}{|a|}\right)^n$ qui ne dépend plus de z et qui est le terme d'une série convergente. Ainsi, en considérant $n \in \mathbb{N}$ et en posant la suite de polynômes

$$P_n(z) = -\sum_{i=0}^{n} \frac{z^i}{a^{i+1}}$$

Alors par ce que nous avons vu précédemment, on a que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $z \in K$, que

$$\left|\frac{1}{z-1} - P_n(z)\right| = \left|\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{z^i}{a^{i+1}}\right|$$

Ainsi, P_n converge uniformément sur K vers $\frac{1}{z-a}$ et ainsi on a $A \neq \emptyset$.

1. Utilisation de la notion de compacité
2. Connexité. Exemples et applications
3. Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.

2.2 A est fermé dans K^c

Dire que A est fermé dans K^c revient à montrer que $A \cap K^c$ est un fermé de $\mathbb{C}$, et donc que $\overline{A \cap K^c} = \overline{A} \cap K^c = A \cap K^c$ dans $\mathbb{C}$. L'inclusion $A \cap K^c \subset \overline{A} \cap K^c$ est évidente. Considérons $a \in \overline{A} \cap K^c$. Soit $d = d(a, K)$. On a $d > 0$. En effet, si on avait $d = 0$, on aurait que $a \in \overline{K} = K$ et donc que $a \in K$ et $a \in K^c$. Soit maintenant (a_n) une suite de A qui converge vers a. Sans perte de généralité, on peut supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a - a_n| < \frac{d}{2}$ (il suffit de considérer la suite à partir du rang où $|a - a_n| < \frac{d}{2}$). Ainsi, pour $z \in K$, on a

$$\left| \frac{1}{z - a_n} - \frac{1}{z - a} \right| = \left| \frac{a_n - a}{(z - a)(z - a_n)} \right| \leq \frac{|a_n - a|}{\frac{d}{2} d} = \frac{2}{d^2} |a_n - a|$$

Or, (φ_{a_n}) est une suite d'éléments de $P(K)$ (car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in A$) et on a que $||\varphi_{a_n} - \varphi_a||_{\mathcal{C}(K)} \leq \frac{2}{d^2} |a_n - a|$. Ainsi, φ_a est une limité uniforme d'éléments de la forme φ_{a_n} et donc $\varphi_a \in \overline{P(K)} = P(K)$, d'où $a \in A \cap K^c$ et ainsi A est bien un fermé dans K^c.

2.3 A est ouvert dans K^c

On va montrer que $A \cap K^c$ est un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $a \in A$ et $d = d(a, K)$ (qui existe pour les mêmes raisons que précédemment). On va montrer que

$$\overline{\mathcal{B}} \left(a, \frac{d}{2} \right) \subset A$$

Soit $h \in \mathbb{C}$ tel que $|h| \leq \frac{d}{2}$. Soit $z \in K$. On a alors que

$$\frac{1}{z - a - h} = \frac{1}{z - a} \frac{1}{1 - \frac{h}{z - a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{(z - a)^{n+1}}$$

En effet, on a pour tout $z \in K$,

$$|h| \leq \frac{d}{2} < d = d(a, K) \leq d(a, z) = |z - a|$$

et on a donc bien que $\left| \frac{h}{z-a} \right| < 1$. Or, on a $\left| \frac{h^n}{|(-a)^{n+1}} \right| \leq \frac{d^n}{2^n} \frac{1}{|z-a|^{n+1}}$ par hypothèse sur h. Mais on a $d \leq |z - a|$, si bien que $\left| \frac{h^n}{(z-a)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{2^n d}$. Ainsi, comme cette majoration est vraie pour tout $z \in K$, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{(z - a)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_a(z)^{n+1} h^n$$

converge uniformément vers $\frac{1}{z-a-h} = \varphi_{a+h}(z)$. Or, on a $\sum_{i=0}^{n} \varphi_a^{n+1} h^n \in P(K)$ et par le même argument que pour montrer que A est fermé, on en déduit que $a + h \in A$ pour tout $h \in \mathbb{C}$ tel que $|h| \leq \frac{d}{2}$, et donc ainsi on a bien que $\overline{\mathcal{B}} \left(a, \frac{d}{2} \right) \subset A$ et donc que A est un ouvert de K^c.

2.4 Conclusion

On a montré que A est un ouvert-fermé non vide de K^c. Or, ce dernier est connexe. Ainsi, on en déduit que $A = K^c$ et donc que l'on a bien démontré le théorème. $\square$

3 Référence

J'ai uniquement utilisé *Topologie* de H. Queffélec, bas de la page 140. Il faut détailler certains arguments afin de ne pas se tromper et il y a plusieurs coquilles (notamment dans la preuve que A est ouvert où les modules ont mystérieusement disparus).